SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. FAVINI

EQUAZIONI PARABOLICHE ASTRATTE E APPLICAZIONI

(Seconda Parte)

11 FEBBRAIO 1988

INTRODUZIONE

In questo seminario vorrei descrivere alcuni esempi di applicazione dei risultati astratti di cui ho parlato nel mio precedente Seminario.

Vediamo di ricordare i principali teoremi astratti ottenuti.

Siano $L(t), M(t)$, $0 \le t \le \tau$, famiglie di operatori lineari chiusi da Y in X, X, Y due spazi di Banach complessi, tali che

i) Esiste $L(t)^{-1} \in \mathscr{L}(Y,X)$ $\forall t$;

ii) $D(L(t)) \hookrightarrow D(M(t))$ $\forall t$;

iii) $t \to M(t)L(t)^{-1} = T(t) \in C[0,\tau;\mathscr{L}(X)]$

iv) $t \to L(t)^{-1} \in C[0,\tau;\mathscr{L}(X,Y)]$

v) $\|(zT(t)+1)^{-1};\mathscr{L}(X)\| \le$ Costante $\forall z, \mathrm{Re}\, z \ge 0$, $0 \le t \le \tau$,

vi) $T(\cdot) \in C^{(1)}[0,\tau;\mathscr{L}(X)]$ e

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}(zT(t)+1)^{-1};\mathscr{L}(X)\right\| \le C(1+|z|)^{1-\rho}, \quad 0<\rho\le 1,$$

vii) $\|T'(t)-T'(s);\mathscr{L}(X)\| \le c|t-s|^{\varepsilon}$, $0<\varepsilon\le 1$.

Diciamo che è soddisfatta l'ipotesi (H) se

(H) *C'è uno spazio di Banach* $Y_1 \hookrightarrow Y$ *con continuità tale che*

$$\|L(t)^{-1}-L(s)^{-1};\mathscr{L}(X,Y_1)\| \le k|t-s|^{\alpha}, \forall t,s \in [0,\tau], \quad 0<\alpha\le 1.$$

Le prossime assunzioni riguardano la non linearità f:

(K) $(t,y) \to f(t,y)$ *è di classe* $C^{(1)}$ *da* $[0,\tau]\times V$ *in* X, *dove* V *è un intorno di* $u_0 \in Y_1 \cap D(L(o))$ *in* Y_1 *e*

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x_1)-\frac{\partial f}{\partial x}(s,x_2);\mathscr{L}(Y_1;X)\right\| \leq k(|t-s|^{\beta}+\|x_1-x_2;Y_1\|),$$

$t,s\in[0,\tau]$, x_1, $x_2\in V$,

$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(o,u_o);\mathscr{L}(Y_1,X)\right\| \leq \eta$, η *piccolo*;

(L) $\omega_o = M(o)u_o$,

$f(o,u_o)-(I+T'(o))L(o)u_o\in R(T(o))$.

Vale allora il

Teorema 1. *Sotto le ipotesi* (i)-(vii), (H),(K),(L), *sia*

$0<\nu<\rho\varepsilon$, $\nu\leq\alpha,\beta\leq 1$.

Se τ *e* η *sono sufficientemente piccoli, c'è una unica soluzione stretta del problema*

$$\text{(P)}\qquad \begin{cases}\frac{d}{dt}(M(t)u(t))+L(t)u(t) = f(t,u(t)), & 0\leq t\leq\tau,\\ M(t)u(t)_{|t=o} = \omega_o,\end{cases}$$

tale che $L(\cdot)u(\cdot)$, $\frac{d}{dt}(M(\cdot)u(\cdot))\in C^{\nu}[0,\tau;X]$.

Il TEOREMA 1 permette di trattare, attraverso un procedimento di linearizzazione, problemi più generali di (P).

Sia $M(t)$, $0\leq t\leq\tau$, una famiglia di operatori lineari chiusi da Y_1 in X e sia $g = g(t,u)$ una applicazione da $[o,\tau]\times V a X$, V intorno di $u_o\in Y_1$, X,Y_1 spazi di Banach.

Sia $g\in C^{(1)}$, con $\frac{\partial g}{\partial u}(t,u_o) = -\mathscr{L}(t)\in\mathscr{L}(Y_1;X)$.

Il problema

$$(P)_1 \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = g(t,u(t)), \ 0\le t\le \tau, \\ M(t)u(t)_{|t=o} = \omega_o \end{cases}$$

viene scritto nella forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = -\mathscr{L}(t)u(t) + \{g(t,u(t)) + \mathscr{L}(t)u(t)\}, \ 0\le t\le \tau, \\ M(t)u(t)_{|t=o} = \omega_o. \end{cases}$$

Sia $Y(t)$, $0\le t\le \tau$, un sottospazio di Y_1 tale che la restrizione $L(t)$ di $\mathscr{L}(t)$ a $Y(t)$ soddisfi tutte le assunzioni (i)-(vii).

Allora il TEOREMA 1 permette di risolvere

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = -L(t)u(t) + \{g(t,u(t)) + \mathscr{L}(t)u(t)\}, \ o\le t\le \tau, \\ M(t)u(t)_{|t=o} = \omega_o, \end{cases}$$

purchè

$$(M) \quad \begin{cases} \omega_o = M(o)u_o, \text{ con } u_o \in Y(o), \\ L(t) \text{ soddisfi } (H), \\ \|\frac{\partial g}{\partial t}(t,u_1) - \frac{\partial g}{\partial u}(s,u_2);\mathscr{L}(Y_1;X)\| \le k(|t-s|^\beta + \|u_1-u_2;Y_1\|), o\le t,s\le \tau, \ u_i \in V, \\ g(o,u_o) - T'(o)u_o \in R(T(o)). \end{cases}$$

Si noti che per $F(t,u) = g(t,u) - \frac{\partial g}{\partial u}(t,u_o)u$ si ha $\frac{\partial F}{\partial u}(o,u_o) = 0$.

Dunque,

Teorema 2. *Sotto le ipotesi* (i)-(vii) *e* (M), *se* $0<\nu<\rho\varepsilon$, $\nu\leq\alpha,\beta\leq 1$, *c'è una soluzione (locale nel tempo) stretta* u *di* $(P)_1$, *tale che* $u(t)\in D(L(t))$ $\forall t\in[o,\tau]$ *e* $t\to\frac{t}{dt}(M(t)u(t))\in C^{\nu}[o,\tau;X]$.

Se g è definita da $[o,\tau]\times Y_1$ a X, è $C^{(1)}$ e $\frac{\partial g}{\partial u}(t,u)$ ha le proprietà

$$(N)\quad\begin{cases}\|\frac{\partial g}{\partial u}(t,u_1)-\frac{\partial g}{\partial u}(s,u_2);\mathscr{L}(Y_1;X)\|\leq h(|t-s|^{\beta}+\|u_1-u_2;Y_1\|)\\ \qquad\forall t,s\in[o,\tau],\ u_j\in V,\ \text{intorno di } u_o \text{ in } Y_1;\\ \text{Posto } -\frac{\partial g}{\partial u}(0,u_o)=L,\ \text{risulta}\\ \qquad\|L(zM+L)^{-1};\mathscr{L}(X)\|\leq \text{costante},\quad \text{Re}z\geq 0\quad (M\equiv M(t)),\end{cases}$$

allora con tecnica analoga si ottiene il

Teorema 3. *Valga* (N) *e sia* $\omega_o=Mu_o, u_o\in Y_1$, *con* $g(o,u_o)\in R(ML^{-1})=$ $=M(Y_1)$.

Allora c'è una soluzione stretta locale u *di* (P_1) *tale che* $t\to\frac{d}{dt}(Mu(t))\in C^{\nu}[o,\tau;X]$ *per ogni* $0<\nu\leq\beta$, $\nu<1$.

APPLICAZIONE 1. Siano $a_o(t;u,v), u,v\in H_o^m(\Omega), m\geq 1$, Ω aperto limitato di R^n con $\partial\Omega$ regolare, oppure $\Omega=R^n$, $a_1(x,y)$, $x,y\in W$, W spazio di Hilbert con $V=H_o^m(\Omega)\hookrightarrow W\hookrightarrow L^2(\Omega)$ forme sesquilineari su V e W, rispettivamente, tali che

$|a_o(t;u,v)|\leq C_1\|u;V\|\ \|v;V\|,$

$\mathrm{Re}\ a_o(t;u,u)\geq C_2\|u;V\|^2,\ C_2>0,$

$|a_1(x,y)|\leq C_3\|x;W\|\ \|y;W\|\ ,$

$a_1(u,u)\geq o\quad \forall u\in V,$

$\exists \frac{d}{dt}\ a_o(t;u,v) = a_o'(t;u,v)\quad \forall u,v\in V$ e

$|a_o'(t;u,v)|\leq C_4\|u;V\|\ \|v;V\|,$

$|a_o'(t;u,v)-a_o'(s;u,v)|\leq C_s|t-s|^a\|u;V\|\ \|v;V\|,\quad 0<a<1.$

Siano $L(t)$ e M gli operatori lineari limitati da V in V^* e da W in W^* associati ad $a_o(t;u,v)$ e ad $a_1(x,y)$, rispettivamente. Si vede facilmente che (i)-(vii) e (H) sono soddisfatte, con $X=Y^*$, $Y=Y_1=V$, $\rho=1$, $\varepsilon=a$. Infatti,

$\|L(t)-L(s);L(V;V^*)\|\leq k|t-s|,\ 0\leq t,s\leq\tau,$

implica che (H) è vera con $\alpha = 1$,[7].

Sia a una funzione a valori reali tale che

$a(u(x),Du(x),\dots D^k u(x))$, a di classe $C^{(2)}$,

k intero non negativo, abbia senso per ogni $u\in V = H_o^m(\Omega)$: $k\leq m$.

Vogliamo applicare il TEOREMA 1, con

$f(u)(x) = a(u(x),\dots,D^k u(x)).$

Se $u,v\in V$,

$$(F(u+v)-F(u))(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\eta} a(u(x)+\eta v(x),\dots,D^k u(x)+\eta D^k v(x))d\eta =$$

$$= \int_0^1 [\frac{\partial a}{\partial\xi_0}(u^{(i)}(x)+\eta v^{(i)}(x))v(x) + \frac{\partial a}{\partial\xi_1}(u^{(i)}(x)+\eta v^{(i)}(x))Dv(x) + \dots +$$

$$+ \frac{\partial a}{\partial\xi_k}(u^{(i)}(x)+\eta v^{(i)}(x))D^k v(x)]d\eta$$

Sia $\|u;V\|,\|v;V\|\leq r$. Allora

$$(\int_\Omega |[f(u+v)-f(u)](x)-[\frac{\partial a}{\partial\xi_0}(u^{(i)}(x))v(x)+\frac{\partial a}{\partial\xi_1}(a^{(i)}(x))Dv(x)+\dots+\frac{\partial a}{\partial\xi_k}(u^{(i)}(x))D^k v(x)]|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq M(r)\{(\int_\Omega (|v(x)|+\dots+|D^k v(x)|)^2|v(x)|^2 dx)^{1/2} + \dots +$$

$$+ (\int_\Omega (|v(x)|+\dots+|D^k v(x)|)^2|D^k v(x)|^2 dx)^{1/2}\} \leq$$

$$\leq M'(r)(\sup_{\bar\Omega}|v(x)|+\dots+\sup_{\bar\Omega}|D^k v(x)|)\|v;V\|$$

Ora, se $k + \frac{n}{2} < m$, possiamo applicare il Teorema di immersione di Sobolev [per es. Pazy, pp. 208 e 222] e dedurre che vale una stima del tipo

$$M''(r)\|v;V\|^2 ;$$

e così f è differenziabile come applicazione da V in H, quindi, anche da V in V*.

Analogamente, sempre il teorema di Sobolev assicura che f'(u) è localmente lipschitz-continua.

In definitiva, il <u>TEOREMA 1</u> si applica a problemi del tipo

$$\frac{\partial}{\partial t}(M(x,D)u(t,x))+L(t,x,D)u(t,x)=a(u(x),\ldots,D^k u(x)),$$

$$0\le t\le \tau,\ x\in\Omega,$$

$$u(t,\cdot)\in H^m_0(\Omega),$$

$$M(x,D)u(o,x) = M(x,D)u_0(x),$$

con u_0 sufficientemente regolare,

$$\sup_{\Omega} \left|\frac{\partial}{\partial \xi_j} a(u_0(x),\ldots,D^k u_0(x))\right|,\ j=0,1,\ldots,k,$$

piccolo, $k+\frac{n}{2}<m_0$ e

$$a(u_0(\cdot),\ldots,D^k u_0(\cdot))-(I+T'(0))L(o,\cdot,D)u_0(\cdot)\in M(V).$$

Per esempio, se $n=1$, k può arrivare a $m-1$ e, se $L(t)\equiv L$, l'ultima condizione diventa

$$a(u_0(x),\ldots,D^k u_0(x))-L(x,D)u_0(x) = M(x,D)w(x),$$

per un certo $w\in H^m_0(\Omega)$.

APPLICAZIONE 2. Sia $C[0,1;K] = C$ lo spazio di tutte le funzioni continue da $[0,1]$ in $K(=R$ o $C)$, con

$$\|f\| = \max_x |f(x)|$$

Sia $C_{o,o} = \{\phi\in C: \phi(o) = \phi(1) = 0\}$ e si ponga

$$\mathscr{D}(A) = D(A) = \{\phi\in C_{o,o} : \phi'\in C,\ \phi''\in C_{o,o}\},$$

$$A\phi = -\phi'', \quad \phi \in D(A) .$$

E' ben noto [3, p. 312] che $-A$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico in $C_{o,o}$.

Osserviamo che si possono trovare altre condizioni ai limiti per i quali vale ancora la stessa conclusione [cfr. sempre 3].

Notiamo [2, p. 192] che $\forall n \in N$

$$\|u';C\| \leq \frac{1}{n+2} \|u \ ;C\| + 2(n+1)\|u;C\|.$$

Sia $\Psi:[o,\tau]xR^3 \to R$ di classe $C^{(2)}$ e si ponga

$$f(t,u)(x)=\Psi(t,u(x),u'(x),u''(x)) \quad , \quad o \leq t \leq \tau, \ x \in [0,1].$$

Ripetendo discorsi analoghi a quelli della APPLICAZIONE 1 (in questo caso, non c'è bisogno di scomodare il Teorema di immersione), si vede che f è regolare e

$$[\frac{\partial f}{\partial u}(t,u)h](x)= \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} (t,u(x),u'(x),u''(x)h(x)+ \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} (t,u(x),u'(x),u''(x))h'(x) +$$
$$+ \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3} (t,u(x),u'(x),u''(x))h''(x).$$

Per utilizzare il TEOREMA 1 nella trattazione del problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \psi(t,u, \frac{\partial u}{\partial x} , \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}), \ 0 \leq t \leq \tau, 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(o,x) = u_o(x), \quad x \in [o,1],$$

$$u(t,o)=u(t,1)= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (t,o) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,1) = 0,$$

si dovrà allora assumere che

$$\max_j \sup_x \left|\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}(0,u_o(x),u_o'(x),u_o''(x))\right| \text{ è piccolo e}$$

che

$$u_o\in C^{(4)}[0,1], u_o(o) = u_o(1)=u_o''(o)= u_o''(1)=0=u_o^{(4)}(o)=u_o^{(4)}(1) \text{ e}$$

$$\psi(o,o,p,o) = 0 \ \forall p\in R,$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_1^\alpha\partial\xi_3^\beta}(o,o,p,o) = 0 \ \forall p\in R \text{ e } \forall\alpha,\beta\in\{o,1,2\},\ \alpha+\beta=2,$$

oppure $u_o^{(k)}(j) = 0$, $j = 0,1$, $k = 0,1,\dots,4$.

Osservazione. Invece dell'operatore A sopra considerato, si potrebbe studiare

$$A_o u(x) = -a(x)u''(x)+b(x)u'(x)+c(x)u(x)$$

ed applicare i ben noti teoremi di perturbazione [per esempio, Kato 2] ad $A+A_o$.

Per esempio, si vede che $-(A+A_o)$ genera un semigruppo analitico in $C_{o,o}$ se $\alpha = \sup_x|a(x)|$ è piccolo e $b(o)=b(1)=0$.

La situazione diventa più complicata se uno tenta di trattare problemi parabolici analoghi a quelli della APPLICAZIONE 2 relativamente a domini Ω in R^n, $n>1$: vedi APPLICAZIONE 3.

Osserviamo esplicitamente che il TEOREMA 3 consente lo studio di problemi del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(t,u(x),u'(x),u''(x)),\quad 0\le t\le\tau,\quad o\le x\le 1,$$

$$u(o,x) = u_o(x),\quad o\le x\le 1,$$

più condizioni ai limiti. Posto

$$g(t,x)(x) = g(t,u(x),u'(x),u''(x) \ , \ t\in[o,\tau], \ u\in D(A),$$

è facile vedere che se $g\in C^{(1)}$, allora

$$[\frac{\partial g}{\partial u}(t,u)v](x) = \frac{\partial g}{\partial \xi_1}(t,u(x),u'(x),u''(x))v(x) + \frac{\partial g}{\partial \xi_2}(t,u(x),u'(x),u''(x))v'(x)+$$

$$+ \frac{\partial g}{\partial \xi_3}(t,u(x),u'(x),u''(x))v''(x);$$

quindi, si applica l'osservazione precedente se, per esempio,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \xi_3}(o,u_o(x),u_o'(x),u_o''(x))-1\right| \text{ è sufficientemente piccola } \forall x\in[0,1] \text{ e}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_2}(o,u_o(x),u_o'(x),u_o''(x)) = \frac{\partial g}{\partial \xi_2}(1,u_o(x),u_o'(x),u_o''(x))=0 \quad \forall x\in[0,1].$$

APPLICAZIONE 3. Sia Ω un dominio limitato di R^n a frontiera $\partial\Omega$ regolare. Consideriamo l'operatore differenziale del secondo ordine

$$(-Au)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + a(x)u(x),$$

uniformemente ellittico su $\bar{\Omega}$.

Se si pone $X = C(\bar{\Omega})$, munito della norma del sup, e $D(A) = \{u\in W^{2,p}(\Omega): Au\in C(\bar{\Omega}),\ u=0 \text{ su } \partial\Omega\}$, con $p>n$, dai risultati di B. Stewart [6] segue che $-A$ genera un semigruppo analitico non fortemente continuo in t=0 perchè $\overline{D(A)} = C_o(\bar{\Omega}) \neq X$ [vedi anche: E. Sinestrari-W. von Wahl 5].

Sia f di classe $C^{(2)}$ da R in sè. Vogliamo trattare il problema

$$(P)_2 \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -Au(t,x) + f(Au(t,x)), \quad 0 \le t \le \tau, \quad x \in \Omega, \\ u(t,\cdot) \in D(A) \quad \forall t \in [o,\tau], \\ u(o,x) = u_o(x), \; x \in \Omega. \end{cases}$$

Poichè non è restrittivo supporre che A abbia inverso limitato, $(P)_2$ assume la forma astratta

$$\frac{d}{dt}(L^{-1}v)(t) = -v(t) + f(v(t)), \; 0 \le t \le \tau,$$

$$(L^{-1}v)(t)_{|t=o} = u_o.$$

Posto $F(v)(x)=f(v(x))$, $v \in C(\bar{\Omega})$, si ha $\forall h \in C(\bar{\Omega})$, $\{F(v+h)-F(v)\}(x)-f'(v(x))h(x)=$ $=\int_o^1 [f'(v(x)+\eta h(x))-f'(v(x))]h(x)d\eta$; così, se $v_o=Lu_o$ $(\in C(\bar{\Omega}))$, $\|v-v_o;C(\bar{\Omega})\| \le r$, $\|h;C(\bar{\Omega})\| \le r$, allora c'è una costante $k = k(r)$ tale che

$$|\{F(v+h)-F(x)\}(x)-f'(v(x))h(x)| \le k\int_o^1 |h(x)|^2 d\eta \le k\|h;C(\bar{\Omega})\|^2.$$

Così F è differenziabile e

$$\{F'(v)(h)\}(x) = f'(v(x))h(x), \; x \in \bar{\Omega}.$$

Inoltre, poichè

$$F'(v_1)(h)(x) - F'(v_2)(h)(x) = [f'(v_1(x))-f'(v_2(x))]h(x),$$

esiste $h_1 = h_1(r)>0$ tale che $\forall v_1,v_2 \in C(\bar{\Omega})$, $\|v_i;C(\bar{\Omega})\| \le r$,

si ha

$$\|F'(v_1)-F'(v_2);\mathscr{L}(C(\bar{\Omega})\| \leq h_1\|v_1-v_2;C(\bar{\Omega})\|$$

Si applica il TEOREMA 1, con $X = Y_1=Y=C(\bar{\Omega})$: si dovrà assumere che

$$\sup_{\bar{\Omega}} |f'(v_0(x))| \text{ è sufficientemente piccolo}$$

e che $x\to f(v_0(x)) - v_0(x)\in D(A)$.

In particolare, se $v_0 = 0$ su $\partial\Omega$, allora dovrà essere $f(0) = 0$.

Osservazione. Si può studiare anche il problema più generale connesso con l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -Au(t,x) + f(Bu(t,x)),$$

dove $B = B(x,D)$ è un operatore differenziale di ordine ≤ 2. Ci si dovrà cautelare, a questo fine, che l'operatore astratto definito da BA^{-1} risulti limitato da $C(\bar{\Omega})$ in sé, cioè $\forall u\in D(A)$ si ha $u\in D(B)$ e

$$\|Bu : C(\bar{\Omega})\| \leq \text{Cost.} \|Au;C(\bar{\Omega})\|.$$

APPLICAZIONE 4. Sia Ω un dominio limitato di R^n con $\partial\Omega$ regolare. Sia

$$-A(t,x,D)= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(t,x)I,$$

$(t,x)\in [o,\tau]x\bar{\Omega}$,

$$B(t,x,D) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha(t,x)I \ , \ (t,x)\in [o,\tau]x\partial\Omega.$$

Assumiamo che i coefficienti soddisfino tutte le ipotesi (A1,2), (B1,2), (AB2,3) in Acquistapace-Terreni [1]. Naturalmente,

$$D(A(t)) = \{u\in C(\bar\Omega)\cap W^{2,q}(\Omega);\ A(t,\cdot D)u\in C(\bar\Omega),$$

$$B(t,\cdot,D)u = 0 \text{ su } \partial\Omega\},\quad q>n,$$

$$A(t)u = A(t,\cdot,D)u.$$

Sia $\phi\in C^{(2)}(R)$; consideriamo il problema

$$(P)_3\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \phi(-A(t,x,D)u(t,x)),\ 0\le t\le\tau,\ x\in\bar\Omega,\\ B(t,x,D)u(t,x)=0,\quad 0\le t\le\tau,\quad x\in\partial\Omega,\\ u(0,x) = u_0(x),\quad x\in\Omega. \end{cases}$$

Se F è definita da

$$F(v)(x) = \phi(v(x)),\ x\in\bar\Omega,\ v\in C(\bar\Omega),$$

allora $(P)_3$ assume la forma astratta

$$\begin{cases} u'(t) = F(-A(t)u(t)),\quad 0\le t\le\tau,\\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

o anche, posto $A(t)u(t) = v(t)$,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(A(t)^{-1}v(t)) = F(-v(t)),\quad 0\le t\le\tau,\\ A(t)^{-1}v(t)_{|t=0} = u_0. \end{cases}$$

Come si è visto nell'applicazione precedente, F è differenziabile e

$$[F'(v)h](x) = \phi'(v(x))h(x),\quad v,h\in C(\bar\Omega).$$

Inoltre, se $\phi'(t)>0$ per ogni t, allora $F'(-v_0)A(t)$ ha le stesse proprietà di $A(t)$; qui $v_0 = A(o)u_0$.

(Osserviamo che molto recentemente, W. won Wahl ha studiato in [8] la risolubilità globale di un problema analogo (molto più semplice) con condizioni ai limiti di tipo Dirichlet, a cui senz'altro si applica quanto sopra detto)

Così il problema è risolto se

$$F(-v_0) - Sv_0 \in D(A(o)),$$

con $S = \frac{d}{dt}(A(t)^{-1})|_{t=0}$.

Se $D(A(t))$ fosse indipendente da t,

$$S = -A(o)^{-1} A'(o)A(o)^{-1}$$

e così l'ultima condizione si ridurrebbe alla

$$F(-A(o)u_0) \in D(A(o)).$$

APPLICAZIONE 5. Facendo uso delle notazioni introdotte nella APPLICAZIONE 1 del Seminario precedente, si consideri il problema

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -A(t,x,D)u(t,x)+F(t,u(t,x)),\ 0\leq t\leq \tau,\ x\in \Omega,$$

$$B_j(t,x,D)u=0\ ,\ 0\leq t\leq \tau,\ x\in \partial\Omega,$$

$$u(o,x) = u_0(x),\ x\in \Omega,$$

nell'ambito della teoria L^p.

Qui

$$F(t,u)(x) = f(t,u(x),\dots,D^{2m-1}u(x)) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2m} g_\alpha(t,u(x),\dots,D^{2m-1}u(x))D^\alpha u$$

Sotto opportune condizioni di regolarità su f e g_α, si ha

$$[\frac{\partial F}{\partial u}(t,u)h](x) = \frac{\partial f}{\partial \xi_o}(t,u(x),\dots,D^{2m-1}u(x))h(x) + \frac{\partial f}{\partial \xi_1}(t,u(x),\dots,D^{2m-1}u(x))Dh(x) +$$

$$+ \dots \frac{\partial f}{\partial \xi_{2m-1}}(t,u(x),\dots D^{2m-1}u(x))D^{2m-1}h(x) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2m}\left(\sum_{j=o}^{2m-1}\frac{\partial g\alpha}{\partial \xi_j}(t,u(x),\dots,D^{2m-1}u(x))D^j h(x)\right)D^\alpha u(x)$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2m} g_\alpha(t,u(x),\dots,D^{2m-1}u(x))D^\alpha h(x).$$

Ciò in forza della teoria di Sobolev: infatti, si può stimare

$$\int_\Omega |D^{j-1}h(x)|^{2p}|D^\alpha u(x)|^p dx \text{ , } j = 1,\dots,2m,$$

per mezzo di

$$\|h;W^{2m,p}(\Omega)\|^{2p}\|u;W^{2m,p}\|^p.$$

La condizione

$$\|\frac{\partial F}{\partial u}(\sigma,u_o);\mathscr{L}(W^{2m,p}(\Omega);\ L^p(\Omega))\| \text{ piccola}$$

viene letta

$$\sup_x \left|\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(o,u_o(x),\dots,D^{2m-1}u_o(x))\right| \text{piccola}, \quad j = 0,\dots,2m-1,$$

$$\max_{\substack{|\alpha|=2m \\ j=0,1,2m-1}} \sup_x |g_\alpha(o,u_o(x),\dots,D^{2m-1}u_o(x))|, \ \sup_x \left|\frac{\partial g_\alpha}{\partial \xi_j}(o,u_o(x),\dots,D^{2m-1}u_o(x))\right|$$

piccolo.

BIBLIOGRAFIA

[1] P. ACQUISTAPACE-B. TERRENI, Some existence and regularity results for abstract non-autonomous parabolic equations, J. Math. Anal. Appl. 99 (1984), 9-64.

[2] T. KATO, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, (1966).

[3] R. MARTIN, Jr., Nonlinear operators of differential equations in Banach spaces, J. Wiley & Sons, (1976).

[4] A. PAZY, Semigroups of linear operators and applications to Partial differential equations, Springer-Verlag (1983).

[5] E. SINESTRARI, W. von WAHL, On the solutions of the first boundary value problem for the linear parabolic equations (1986), preprint.

[6] H.B. STEWART, Generation of analytic semigroup by strongly elliptic operators, Trans. A.M.S. 199 (1974), 141-162.

[7] H. TANABE, Equations of evolution, PITMAN, (1979).

[8] W. von WAHL, On the equation u'-f(Au)=0, Boll. UMI (7), 1-A(1987), 437-441.